Les quotients de complexes

Pour avoir les idées claires

P. Roux

Lycée Joliot Curie

22 avril 2008

Vous pouvez cliquer sur

- les liens de la barre de navigation au dessus de la diapositive
- sur l'icône de navigation en bas à droite

sommaire

l'objet

Ces quelques diapos ont pour but d'éclaircir les situations où l'on travaille sur des quotients du type :

$$\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A}$$

z_A étant, bien entendu l'affixe du point A.

Existence

Le complexe

$$\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A}$$

- existe si et seulement si $A \neq B$
- il est non nul si et seulement si

$$A \neq B \text{ et } C \neq D$$

Existence

Le complexe

$$\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A}$$

- existe si et seulement si $A \neq B$
- il est non nul si et seulement si

$$A \neq B \text{ et } C \neq D$$

Existence

Le complexe

$$\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A}$$

- existe si et seulement si $A \neq B$
- il est non nul si et seulement si

$$A \neq B \text{ et } C \neq D$$

Module

Rappel

si $A \neq B$, le module de

$$\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A}$$

est égal à

$$\frac{CD}{AB}$$

On le démontre en utilisant la règle sur le quotient des modules et $AB = |z_B - z_A|$

Module

Rappel

si $A \neq B$, le module de

$$\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A}$$

est égal à

$$\frac{CD}{AB}$$

On le démontre en utilisant la règle sur le quotient des modules et $AB = |z_B - z_A|$

Argument

Rappel

si $A \neq B$ et si $C \neq D$, un argument de

$$\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A}$$

est égal à

$$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD})$$

On rappelle que 0 n'admet pas d'argument et donc qu'il est nécessaire de supposer que $C \neq D$

Argument

Rappel

si $A \neq B$ et si $C \neq D$, un argument de

$$\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A}$$

est égal à

$$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD})$$

On rappelle que 0 n'admet pas d'argument et donc qu'il est nécessaire de supposer que $C \neq D$

Module et argument

Rappel

Deux complexes non nuls sont égaux si et seulement si ils ont même module et un même argument à 2π près.

Si le module est r et un argument est α, on peut les écrire

$$re^{i\alpha}$$

Module et argument

Conséquence

si $A \neq B$ et si $C \neq D$ et si

$$\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A} = re^{i\alpha}$$

avec r réel strictement positif, on peut en déduire que

$$\frac{CD}{AB} = r$$

et

$$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}) = \alpha \text{ à } 2\pi \text{ près}$$

Module et argument

Conséquence

si $A \neq B$ *et si* $C \neq D$ *et si*

$$\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A} = re^{i\alpha}$$

avec r réel strictement positif, on peut en déduire que

$$\frac{CD}{AB} = r$$

et

$$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}) = \alpha \text{ à } 2\pi \text{ près}$$

triangle équilatéral

Ce qui précède peut être utilisé pour montrer qu'un triangle ABC est équilatéral direct :

il suffit de prouver que

$$\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = e^{i\frac{\pi}{3}}$$

on voit apparaître la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{3}$

triangle équilatéral

Ce qui précède peut être utilisé pour montrer qu'un triangle ABC est équilatéral direct :

il suffit de prouver que

$$\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = e^{i\frac{\pi}{3}}$$

on voit apparaître la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{3}$

triangle équilatéral

Ce qui précède peut être utilisé pour montrer qu'un triangle ABC est équilatéral direct :

il suffit de prouver que

$$\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = e^{i\frac{\pi}{3}}$$

on voit apparaître la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{3}$

triangle rectangle isocèle

Ce qui précède peut être utilisé pour montrer qu'un triangle ABC est rectangle isocèle en A et direct :

il suffit de prouver que

$$\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = e^{i\frac{\pi}{2}}$$

on voit apparaître la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{2}$

triangle rectangle isocèle

Ce qui précède peut être utilisé pour montrer qu'un triangle ABC est rectangle isocèle en A et direct :

il suffit de prouver que

$$\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = e^{i\frac{\pi}{2}}$$

on voit apparaître la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{2}$

triangle rectangle isocèle

Ce qui précède peut être utilisé pour montrer qu'un triangle ABC est rectangle isocèle en A et direct :

il suffit de prouver que

$$\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = e^{i\frac{\pi}{2}}$$

on voit apparaître la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{2}$

angles de vecteurs

Rappel

L'angle $(\overrightarrow{BM}, \overrightarrow{AM})$ *n'existe que si les deux vecteurs sont non nuls c'est-à-dire que si* $M \neq A$ *et* $M \neq B$

angles de vecteurs

Rappel

Les vecteurs non nuls $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont colinéaires si et seulement si $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) = k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$

Plus précisément,

- si k est pair, les deux vecteurs sont colinéaires de même sens ;
- si k est impair, les deux vecteurs sont colinéaires de sens opposé.

angles de vecteurs

Rappel

Les vecteurs non nuls $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont colinéaires si et seulement si $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) = k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$

Plus précisément,

- si k est pair, les deux vecteurs sont colinéaires de même sens ;
- si k est impair, les deux vecteurs sont colinéaires de sens opposé.

angles de vecteurs

Rappel

Les vecteurs non nuls $\overrightarrow{u}$ *et* $\overrightarrow{v}$ *sont colinéaires si et seulement si* $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) = k\pi$ *avec* $k \in \mathbb{Z}$

Plus précisément,

- si k est pair, les deux vecteurs sont colinéaires de même sens ;
- si k est impair, les deux vecteurs sont colinéaires de sens opposé.

angles de vecteurs

Rappel

Les vecteurs non nuls $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont colinéaires si et seulement si $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) = k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$

Plus précisément,

- si k est pair, les deux vecteurs sont colinéaires de même sens ;
- si k est impair, les deux vecteurs sont colinéaires de sens opposé.

ensembles de points

Conséquence

L'ensemble des points M tels que $(\overrightarrow{BM}, \overrightarrow{AM}) = k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$ *est la droite* (AB) *privée de* A *et de* B

Plus précisément,

- si k est pair, c'est l'extérieur du segment $[AB]$;
- si k est impair, c'est le segment $]AB[$

ensembles de points

Conséquence

L'ensemble des points M tels que $(\overrightarrow{BM}, \overrightarrow{AM}) = k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$ *est la droite* (AB) *privée de* A *et de* B

Plus précisément,

- si k est pair, c'est l'extérieur du segment $[AB]$;
- si k est impair, c'est le segment $]AB[$

ensembles de points

Conséquence

L'ensemble des points M tels que
$(\overrightarrow{BM}, \overrightarrow{AM}) = k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$ *est la droite* (AB) *privée de* A *et de* B

Plus précisément,

- si k est pair, c'est l'extérieur du segment $[AB]$;
- si k est impair, c'est le segment $]AB[$

ensembles de points

Conséquence

L'ensemble des points M tels que $(\overrightarrow{BM}, \overrightarrow{AM}) = k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$ *est la droite* (AB) *privée de* A *et de* B

Plus précisément,

- si k est pair, c'est l'extérieur du segment $[AB]$;
- si k est impair, c'est le segment $]AB[$

angles de vecteurs

Rappel

Les vecteurs non nuls $\overrightarrow{u}$ *et* $\overrightarrow{v}$ *sont orthogonaux si et seulement si* $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) = \frac{\pi}{2} + k\pi$ *avec* $k \in \mathbb{Z}$

ensembles de points

Conséquence

L'ensemble des points M tels que $(\overrightarrow{BM}, \overrightarrow{AM}) = \frac{\pi}{2} + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}$ *est le cercle de diamètre* $[AB]$ *privé de A et de B*

le problème

A et B sont deux points distincts.
On s'intéresse à l'ensemble des point M d'affixe z_M tels que le complexe

$$\frac{z_M - z_A}{z_M - z_B}$$

vérifie certaine propriété.

Rappels

Il faut savoir caractériser les réel et les imaginaires purs en utilisant les arguments et ne pas oublier que 0 joue un rôle à part.

les réels

Rappel

Le complexe z est réel si et seulement si

$$z = 0 \text{ ou } \arg(z) = k\pi \text{ avec } k \in \mathbb{Z}$$

Plus précisément,

- si k est pair, le réel est strictement positif
- si k est impair, le réel est strictement négatif

les réels

Rappel

Le complexe z est réel si et seulement si

$$z = 0 \text{ ou } \arg(z) = k\pi \text{ avec } k \in \mathbb{Z}$$

Plus précisément,

- si k est pair, le réel est strictement positif
- si k est impair, le réel est strictement négatif

les réels

Rappel

Le complexe z est réel si et seulement si

$$z = 0 \textit{ ou } \arg(z) = k\pi \textit{ avec } k \in \mathbb{Z}$$

Plus précisément,

- si k est pair, le réel est strictement positif
- si k est impair, le réel est strictement négatif

les réels

Rappel

Le complexe z est réel si et seulement si

$$z = 0 \text{ ou } \arg(z) = k\pi \text{ avec } k \in \mathbb{Z}$$

Plus précisément,

- si k est pair, le réel est strictement positif
- si k est impair, le réel est strictement négatif

les imaginaires purs

Rappel

Le complexe z est imaginaire pur si et seulement si

$$z = 0 \text{ ou } \arg(z) = \frac{\pi}{2} + k\pi \text{ avec } k \in \mathbb{Z}$$

ensemble de points

Quel est l'ensemble des points M tels que $\dfrac{z_M - z_A}{z_M - z_B}$ ait un module égal à 1 ?

C'est l'ensemble des points $M \neq B$ tels que $\dfrac{AM}{BM} = 1$ ou encore $AM = BM$

c'est la médiatrice de $[AB]$

ensemble de points

Quel est l'ensemble des points M tels que $\dfrac{z_M - z_A}{z_M - z_B}$ soit réel ?

C'est l'ensemble des points $M \neq B$ tels que $M = A$ ou $(\overrightarrow{BM}, \overrightarrow{AM}) = k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$

c'est la droite (AB) privée de B

ensemble de points

Quel est l'ensemble des points M tels que $\dfrac{z_M - z_A}{z_M - z_B}$ soit imaginaire pur ?

C'est l'ensemble des points $M \neq B$ tels que $M = A$ ou $(\overrightarrow{BM}, \overrightarrow{AM}) = \frac{\pi}{2} + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$

c'est le cercle de diamètre $[AB]$ privé de B

confection

fait le 22 avril 2008 avec Beamer
thème Warsaw